BÀI 2 – **ĐỘ ĐO MỜ VÀ TÍCH PHÂN MỜ**

***I Độ đo và độ đo mờ***

* ***Độ đo (measure).*** Hàm tập xác định trên -trường của Ω được gọi là độ đo nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

1. với mọi ,
2. ,
3. Nếu là dãy các tập rời nhau thuộc ta sẽ có

.

* Độ đo được gọi là hữu hạn nếu
* Độ đo được gọi là vô hạn nếu
* Độ đo được gọi là -hữu hạn nếu

trong đó các tập rời nhau từng đôi một và

Ví dụ về độ đo -hữu hạn là *độ đo xác suất.*

* ***Độ đo xác suất.*** Hàm tập xác định trên -trường của Ω được gọi là độ đo xác suất -cộng tính nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

1. với mọi ,
2. ,
3. Nếu là dãy các tập rời nhau thuộc nghĩa là nếu ta sẽ có

.

* *Độ đo xác suất rời rạc (discrete probability measure)*. Độ đo xác suất P trên -trường của Ω được gọi là độ đo xác suất rời rạc nếu tồn tại hữu hạn hoặc đếm được các điểm sao cho với mọi ta có

.

***Không gian xác suất ,, P)***

* Bộ ba *,, P)* với;

1. là tập hợp các biến cố sơ cấp cơ bản
2. là - đại số các tập con của
3. là độ đo cộng tính – xác suất xác định trên ,

được gọi là không gian xác suất.

* Tập thường gọi là không gian các sự kiên sơ cấp; Tập thường gọi là tập các biến cố ngẫu nhiên; là xác suất của biến cố ngẫu nhiên với .
* ***Các tính chất của độ đo xác suất qua các công thức xác suất cơ bản***
* *Công thức nhân xác suất.*

Cho các biến cố ta sẽ có:

(2.1)

* *Công thức cộng xác suất:*

(2.2)

* *Công thức cộng xác suất toàn phần:*

Cho là những biến cố *xung khắc từng đôi một* và chúng tạo nên *một nhóm đủ*, nghĩa là , và B là một biến cố với , ta sẽ có

. (2.3)

* ***Xác suất của sự kiện mờ***
* Cho *,, P)* là một không gian xác suất và là hàm thuộc của tập mờ A (sự kiện mờ A). Khi đó xác suất của sự kiện mờ A tính bởi hệ thức

, nếu là tập liên tục,

, nếu là tập rời rạc.

trong đó tích phân trong hệ thức trên là tích phân Lebesgus-Stieljes.

Theo cách tính trên ta thấy rằng xác suất của tập mờ A, chính là kỳ vọng

của hàm thuộc nghĩa là:

***Ví dụ1:*** Cho với các xác suất tương ứng là

Với tập mờ A xác định bởi

Khi đó ta có xác suất của sự kiện A sẽ là

.

***Ví dụ2:*** Cho độ đo xác suất P là phân phối đều trên đoạn [0, 2] và tập mờ B

có hàm thuộc

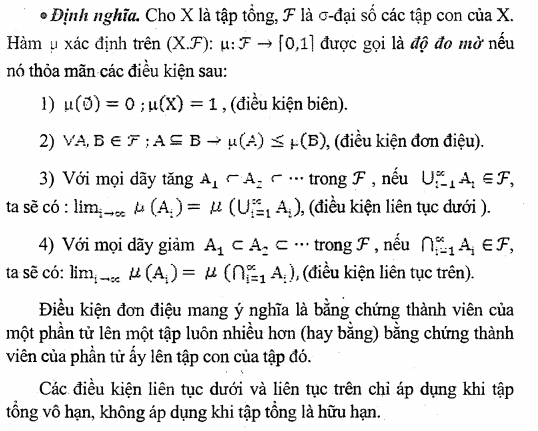
Khi đó xác suất của tập mờ B sẽ bằng

vì hàm mật độ của phân phối đều trên đoạn [0, 2] là

⇔ dP(x) =

Từ đó ta tính được:

* ***Độ đo mờ (fuzzy measure).***



* ***Các tính chất của độ đo mờ***

Từ định nghĩa ta có thể suy ra các tính chất sau của độ đo mờ

* Từ và ta suy ra

.

* Từ và ta suy ra

.

*Bộ ba được gọi là không gian đo mờ*.

* ***Các ví dụ về độ đo mờ***
* ***Độ đo - mờ Sugeno:***

Cho tập hữu hạn là -đại số các tập con của X, và , độ đo - mờ Sugeno là hàm tập không âm , thỏa các điều kiện:

1. ta sẽ có

*Tính chất của độ đo - mờ Sugeno*

Nếu các giá trị của độ đo - mờ Sugeno tại là khi đó ta

sẽ có

(\*)

*Ví dụ về độ đo - mờ Sugeno*

Cho tập với các giá trị

Áp dụng (\*) ta sẽ có:

0,024

Giải phương trình trên ta có 3 nghiệm thực là:

Vì nên ta loại nghiệm

Khi ta có độ đo cộng tính.

Khi ta sẽ có độ đo mờ với

;

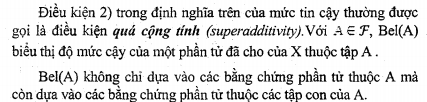
Từ đó ta tính được:

Tương tự ta sẽ thu được:

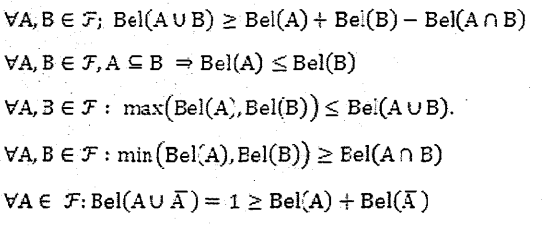
* ***Độ tịn cậy (belief measure - Bel)***

*Độ tin cậy là hàm tập không âm , thỏa các điều kiện:*

1. ***,***



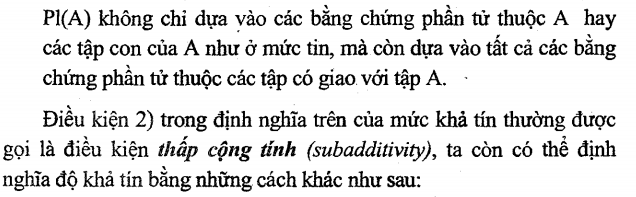
***Các tính chất của độ tin cậy****:*



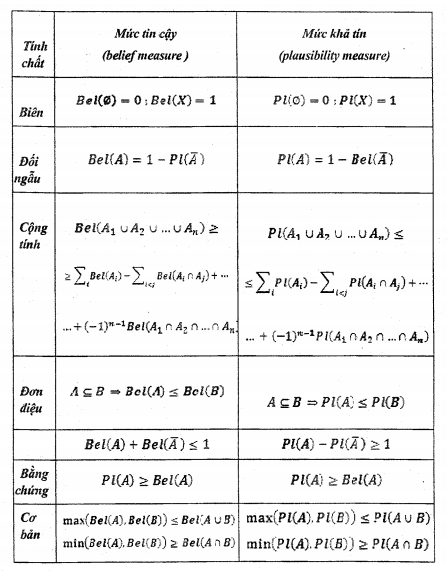
* ***Độ khả tín (plausibility measure - Pl)***

Độ khả tín là một hàm tập ánh xạ từ lên tập [0,1], ta ký hiệu nó là Pl, thỏa các điều kiện:

1. ***,***



Để thấy rõ hơn sự tương đồng và khác biệt giữa hai loại độ đo ta xem trong bảng sau:



***II Tích phân và tích phân mờ***

Trước khi xét đến tích phân mờ ta hãy xét qua một số tích loại tích phân (rõ) đã biết.

* ***Tích phân Riemann*** *(Riemann integral)*

*Định nghĩa:* Cho hàm là một hàm bị chặn, là một phân hoạch của , nếu tồn tại giới hạn hữu hạn của tổng tích phân

không phụ thuộc vào cách phân hoạch và với cách chọn tùy ý thì ta nói rằng hàm khả tích trên đoạn và ta ký hiệu tích phân đó bởi

* *Cách tính tích phân Riemann*

(2.4)

trong đó là một nguyên hàm của nghĩa là: ;

* ***Tích phân Riemann-Stieltjes*** *(Riemann-Stieltjes integral)*

*Định nghĩa:*Cho hai hàm bị chặn và là một phân hoạch của , nếu tổng Riemann của hàm đối với hàm

trong đó là một điểm tùy ý thuộc đoạn , dần tới một gới hạn hữu hạn khi dần tới 0, khi đó ta nói rằng tích phânRiemann Stieltjes của đối với trên đoạn tồn tại và ta ký hiệu nó là

* *Tính chất của tích phân Riemann-Stieltjes*

+ Tích phân Riemann-Stieltjes tồn tại với mọi hàm liên tục trên khi và chỉ khi có biến phân bị chặn trên (nghĩa là tồn tại số M>0 sao cho với mọi phân hoạch của ta có

+ Nếu trên liên tục, có biến phân bị chặn, tồn tại và liên tục ta sẽ có

(2.5)

trong đó tích phân ở vế trái là tích phân Riemann-Stieltjes còn tích phân ở vế phải là tích phân Riemann.

+ Nếu dãy hàm liên tục trên hội tụ đều đến thì với mọi hàm có biến phân bị chặn trên ta sẽ có

(2.6)

+ *Ví dụ về tính tích phân Riemann-Stieltjes.*

Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số λ, hãy tìm momen bậc 2 của biến X.

*Hướng dẫn giải:* Vì X là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số λ nên ta sẽ có độ đo xác suất trong đó là hàm phân phối và là hàm mật độ tương ứng, cụ thể là

Mặt khác ta cần tính momen bậc hai của biến ngẫu nhiên X, nên ta phải tính tích phân Riemann-Stieltjes sau

Sau khi xử lý tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần (2 lần) ta sẽ thu được kết quả

* ***Tích phân mờ Sugeno***

***Định nghĩa****:* Cho là hàm đo được không âm trên và Tích phân Sugeno của trên , ứng với độ đo λ-mờ Sugeno xác định bởi

…,

trong đó là một hoán vị của sao cho

***Ví dụ về tích phân mờ Sugeno***

Trở lại ví dụ trong phần độ đo λ-mờ Sugeno trong phần trước với tập

và

Ta đã tìm được và

;

Cho hàm có các giá trị:

Khi đó theo định nghĩa về tích phân mờ Sugeno ta thu được

***Tính chất của tích phân mờ Sugeno***

* Với mọi *s* và ta sẽ có

*.*